

C

Studijski programi: Računarske nauke
ANALIZA 2

Lekcija 07. 05. 2020.

Iz knjige:

Dr Radoslav Dimitrijević,

ANALIZA REALNIH FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

KRITERIJUMI ZA ISPITIVANJE KONVERGENCIJE REDOVA SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

Teorema 1. (Košijev kriterijum) *Neka je $\sum a_n$ red sa nenegativnim članovima i neka je $C_n = \sqrt[n]{a_n}$. Ako postoji $q \in [0, 1)$ tako da je $C_n \leq q$ počev od nekog prirodnog broja n , tada je red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $C_n \geq 1$ počev od nekog indeksa, tada je red $\sum a_n$ divergentan.*

Dokaz. Neka je počev od nekog prirodnog broja $C_n = \sqrt[n]{a_n} \leq q$, odn. $a_n \leq q^n$. Kako je red $\sum q^n$ konvergentan, to je na osnovu teoreme 2, red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za $n \geq n_0$, tada je $a_n \geq 1$, pa red $\sum a_n$, jer nije ispunjen dovoljan uslov za konvergenciju redova redova da je niz (a_n) beskonačno mali niz.

Posledica 1. *Neka je $C = \lim_n C_n$. Ako je $C < 1$, red konvergentan, a ako je $C > 1$ red je divergentan. Za $C = 1$ red može, ali ne mora biti konvergentan, odn. kriterijum je neodlučiv.*

Dokaz. Kako je $\lim_n C_n = C$, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε tako da je $C - \varepsilon < C_n < C + \varepsilon$ za svako $n \geq n_\varepsilon$. Neka je $C < 1$. Broj ε zbog njegove proizvoljnosti možemo izabrati tako da je $C + \varepsilon < 1$. Stoga je $C_n < 1$ za svako $n \geq n_\varepsilon$, pa je red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $C > 1$, izaberimo ε tako da je $C - \varepsilon > 1$. Tada je $C_n > 1$ i red $\sum a_n$ divergira. ■

Da je Košijev kriterijum iskazan u terminima granične vrednosti neodlučiv kada je $C = 1$, pokazuje sledeći

Primer 1. Red $\sum 1/n$ je divergentan, red $\sum 1/n^2$ je konvergentan, a za oba reda je $C = 1$.

Teorema 2. (Dalamberov* kriterijum) Za red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima označimo sa $\mathcal{D}_n = a_{n+1}/a_n$. Ako postoji $q \in (0, 1)$ i prirodan broj n_0 tako da je $\mathcal{D}_n \leq q$ za $n \geq n_0$, onda je red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\mathcal{D}_n \geq 1$, red $\sum a_n$ je divergentan.

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}_n \leq q < 1$ za $n \geq n_0$. Tada $a_{n+1} \leq qa_n$ za $n \geq n_0$. No onda je $a_{n+p} \leq a_n q^p$ za $n \geq n_0$. Kako je red $a_n q + a_n q^2 + \dots$ konvergentan, to je na osnovu prvog poredbenog kriterijuma konvergentan i red $a_n + a_{n+1} + \dots$, odakle sledi konvergencija reda $\sum a_n$.

Ako je $\mathcal{D}_n \geq 1$, tada je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

gde je $b_n = 1/n$, pa je prema teoremi 6 $\sum a_n$ divergentan.

Posledica 2. Neka je $\mathcal{D} = \lim_n \mathcal{D}_n$. Ako je $\mathcal{D} < 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan, a ako je $\mathcal{D} > 1$, red $\sum a_n$ je divergentan. Za $\mathcal{D} = 1$ kriterijum je neodlučiv.

Da je Dalamberov* kriterijum iskazan u terminima granicne vrednosti neodlučiv kada je $\mathcal{C} = 1$, pokazuje **primjer 1**.

Posledice 1 i 2 su zadaci za domaći rad. I ovi zadaci će biti bodovani na završnom ispitu.

Vodite računa da na završnom ispitu može se tražiti da ih ponovo uradite!

* D’Alambert J. (1717-1783)-francuski matematičar

Teorema 7. (Košijev integralni kriterijum) Neka je funkcija $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ nerastuća. Tada je red $\sum f(n)$ konvergentan ako i samo ako je integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan.

Dokaz. Funkcija f je prema pretpostavci nerastuća, pa je $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ za svako $k \leq x \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Integracijom ove nejednakosti dobija se

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

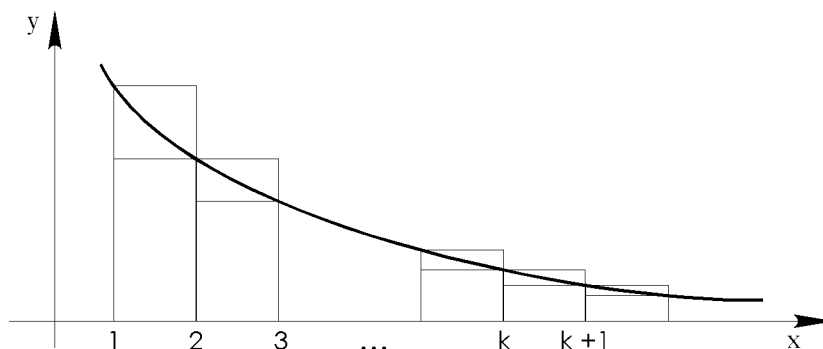
Sumiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1),$$

odn.

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq s_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gde je $s_n = \sum_1^n f(k)$.



Sl. 10

Ako je integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan, onda je

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx = M.$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x) dx = f(1) + M, n \in \mathbb{N},$$

pa je red $\sum f(n)$ konvergentan prema teoremi 1.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je red $\sum f(n)$ konvergentan i neka je njegova suma jednaka s . Tada je $s_n \leq s$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq s$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Funkcija f je nenegativna, pa je funkcija $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ neopadajuća. Stoga za svako $\xi \geq 1$ postoji $n \geq \xi$ tako da je

$$\int_1^{\xi} f(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq s,$$

pa je integral $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ konvergentan. ■

Primer 2. Hiperharmonijski red $\sum 1/n^\alpha$ konvergira za $\alpha > 1$. Zapravo, za $\alpha > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^R = \frac{1}{\alpha-1},$$

pa rezultat sledi na osnovu Kosijevoeg kriterijuma.

Za $\alpha < 1$ i $\alpha = 1$ integral divergira što je dato u našoj knjizi.

ALTERNATIVNI REDOVI

Definicija 1. Red oblika

$$\sum (-1)^{n+1} a_n,$$

gde je $a_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, je **alternativni red**.

Teorema 1. (Lajbnicov* kriterijum) Neka je $\sum (-1)^{n+1} a_n$ alternativni red kod koga je $a_n \geq a_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je $\lim a_n = 0$, onda je alternativni red konvergentan i važi ocena

$$|r_n| \leq a_{n+1}.$$

Dokaz. Kako je niz (a_n) nerastući, to je

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq \\ &\leq (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) = s_{2n+2}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

pa je niz (s_{2n}) neopadajući. Osim toga je

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

za svako $n \geq 1$, pa je niz (s_{2n}) konvergentan, jer je monotono neopadajući i odozgo ograničen. Neka je $\lim s_{2n} = s$. Kako je $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ i $\lim a_n = 0$, to je $\lim s_{2n-1} = s$. Time smo dokazali da je niz (s_n) konvergentan i da je $\sum (-1)^{n+1} a_n = s$.

Da dokažemo drugi deo tvrđenja, primetimo da je niz (s_{2n+1}) nerastući i odozdo ograničen, pri čemu je

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2m+1}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Stoga je $s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$ i $s_{2n-1} - s \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$, odakle sledi da je $|r_n| \leq a_{n+1}$. ■

Primer 1. Red $\sum (-1)^{n+1}/n$ je konvergentan prema Lajbnicovom kriterijumu, jer je niz $(1/n)$ monotono opadajući niz koji konvergira ka nuli.

* Leibniz G.W. (1646-1716)-nemački matematičar

APSOLUTNO I USLOVNO KONVERGENTNI REDOVI

Definicija 1. Red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan ako je brojni red $\sum |a_n|$ konvergentan .

Teorema 1. Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergira onda je on konvergentan. Obrnuto, u opštem slučaju, ne važi.

Dokaz. Kako je red $\sum |a_n|$ konvergentan, tada iz Košijeve teoreme o konvergenciji brojnih redova slijedi za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_ε da je

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$. No onda je

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$, pa je red $\sum a_n$ konvergentan prema Košijeve teoreme o konvergenciji brojnih redova.

Napomenimo da obrat dokazane teoreme u opštem slučaju ne važi. Zaista, red $\sum (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ je prema Lajbnicovom kriterijumu konvergentan, ali ne apsolutno. Za takve redove kažemo da su **uslovno konvergentni**.

Teorema 3. Neka je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan i $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekcija. Tada je red $\sum a_{s(n)}$ apsolutno konvergentan i ima istu sumu kao i red $\sum a_n$.